线性代数第四次自救

四、特征值问题

(1)利用$f(A)$,A^{-1},A^*有相同特征向量，有特征值$f(\lambda)$, λ^{-1},$|A|/\lambda$

例：设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，若存在正整数$k$使得$A^k=O$，求$|E+3A|$的值.

(提示: $\lambda(A)^k=\lambda(O)=0$，$\lambda(E+3A)=1+3\lambda(A)=1$，$|E+3A|=\Pi\lambda_i$)

解：即幂零矩阵所有特征值均为0，且0的代数重数为n，几何重数为$r(N(A))$（或者说$\dim\ker A$）

例：方阵$A\in\mathbf{R}^{2\times 2}$满足$A^2+aA+bE_2=O$，其中$a,b\in\mathbf{R}$，$a^2-4b<0$.
证明对于任意的非零向量$\beta\in\mathbf{R}^2$，向量β, $A\beta$线性无关.

(提示: 反证相关则β为实特征向量，而 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 得特征值为复数)

证明：若β, $A\beta$线性相关，则$\exists\lambda\in\mathbf{R}$，$A\beta=\lambda\beta$，$\beta$为实特征向量，而$\lambda^2+a\lambda+b=0$无实根，矛盾。

(2) 利用特征值特征向量的性质

→几何重数 →代数重数

- $1\le\lambda$的无关特征向量个数$\le\lambda$的重数；不同特征值的特征向量无关
- n阶方阵A可对角化$\Leftrightarrow A$有n个无关特征向量
- 实对称矩阵不同特征值的特征向量正交；实对称矩阵可正交对角化

例：$A\in\mathbf{R}^{3\times 3}$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是$A$的3个不同的特征值，对应特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，
令$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，若$A^3\beta=A\beta$，求$r(A-E)$和$|A+2E|$.

(提示: $(A^3-A)\beta=0$, $(\lambda_1^3-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda_2^3-\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_3^3-\lambda_3)\alpha_3=0$中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关
得$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=0,1,-1$($\lambda^3-\lambda=0$的三个解),$\lambda(A-E)=\lambda(A)-1$,$\lambda(A+2E)=\lambda(A)+2$)

解：$\lambda(A-E)=\lambda-1\Rightarrow\lambda(A-E)$为$-1,0,-2$，故$r(A-E)=2$

$\lambda(A+2E)=\lambda+2\Rightarrow\lambda(A+2E)$为$2,3,1$，故$|A+2E|=2\times3\times1=6$

例：3阶实对称矩阵A的特征值为-1,1,1，属于-1的特征向量$(0,1,1)^T$，求A.

(提示: 求与$\xi_1=(0,1,1)^T$正交的特征向量ξ_2,ξ_3)，$A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(-\xi_1,\xi_2,\xi_3)$)

解：$\xi_2=(1,0,0)^T$，$\xi_3=(0,-1,1)^T$，$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=P^T=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$\therefore A=P\Lambda P^T=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$

(3) 利用相似矩阵有相同的特征值、迹和行列式

例：设$A,B\in\mathbf{R}^{3\times 3}$，$A\sim B$,且 $3E+2A$, $2E+B$, $E-2B$都不可逆，求$A_{11}+A_{22}+A_{33}$.

(提示: A,B共享特征值-1.5,-2,0.5, $|A|=\Pi\lambda_i=1.5$,
$\lambda(A^*)=|A|/\lambda(A)=-1,-0.75,3$，$A_{11}+A_{22}+A_{33}=\mathrm{tr}(A^*)=\Sigma\lambda(A^*)=1.25$)

解：$|3E+2A|=0\Rightarrow\lambda_1=-1.5$，$|2E+B|=0\Rightarrow\lambda_2=-2$，$|E-2B|=0\Rightarrow\lambda_3=\frac{1}{2}$，$A\sim B$，故特征值相等

$|A|=-1.5\times(-2)\times\frac{1}{2}=1.5$，$\lambda(A^*)=\frac{|A|}{\lambda(A)}=-1,-0.75,3$，$A_{11}+A_{22}+A_{33}=\mathrm{tr}(A^*)=3-1-0.75=1.25$

例：$A\in\mathbf{R}^{3\times 3}$使$\xi$, $A\xi$, $A^2\xi$无关，$A^3\xi=3A\xi-2A^2\xi$，计算$|A+E|$.

(提示: $A(\xi,A\xi,A^2\xi)=(\xi,A\xi,A^2\xi)B$,则$A\sim B$,$A+E\sim B+E$, $|A+E|=|B+E|$)

解：ξ, $A\xi$, $A^2\xi$无关$\Rightarrow(\xi,A\xi,A^2\xi)$可逆，记为$P$，令$AP=PB$，则$B=P^{-1}AP$，$A\sim B$

$AP=(A\xi, A^2\xi, 3A\xi-2A^2\xi)=(\xi, A\xi, A^2\xi)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$，故 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$，$B+E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$|A+E|=|B+E|=1\times\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}=1\times(-1-3)=-4$

例：设$\alpha,\beta,\gamma\in R^3$为标准正交列向量组，$A=\beta\alpha^T+\gamma\beta^T+\alpha\gamma^T$，求$|A|$和$tr(A)$.

(提示: $P=(\alpha,\beta,\gamma)$正交, $A=PBP^T=PBP^{-1}$, $A\sim B$,$|A|=|B|$，$tr(A)=tr(B)$)

解：令 $P=(\alpha,\beta,\gamma)$，则 $P^T=P^{-1}$，$P^T=\begin{pmatrix}\alpha^T\\\beta^T\\\gamma^T\end{pmatrix}$，$P^TAP=\begin{pmatrix}\alpha^T\\\beta^T\\\gamma^T\end{pmatrix}(\beta,\gamma,\alpha)\begin{pmatrix}\alpha^T\\\beta^T\\\gamma^T\end{pmatrix}(\alpha,\beta,\gamma)=0$

$B=\begin{pmatrix}0&0&\alpha^T\alpha\\\beta^T\beta&0&0\\0&\gamma^T\gamma&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^T\alpha&&\\&\beta^T\beta&\\&&\gamma^T\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&&\alpha^T\alpha\gamma^T\gamma\\\alpha^T\alpha\beta^T\beta&&\\&\beta^T\beta\gamma^T\gamma&\end{pmatrix}$，$|B|=(\alpha^T\alpha)^2(\beta^T\beta)^2(\gamma^T\gamma)^2=1\times1\times1=1$，$tr(A)=tr(B)=0$

1. 对角线直接求和

若 B 已知是具体数值矩阵，直接看对角元之和。

所有矩阵均符合。
并不需要先求特征值。

2. 迹等于特征值之和

若已知 B 的特征值 λ_i，则 $\mathrm{tr}(B)=\sum\lambda_i$.

（1）反对称矩阵（$B^\top=-B$）

实反对称矩阵所有对角元为 $0 \Rightarrow$ 迹为 0。

（2）零对角矩阵

若对角元全为 0，迹为 0。

（3）幂零矩阵

若 $B^k=0$（幂零），则所有特征值为 $0\Rightarrow$ 迹为 0。

(4) 利用$A\xi=\lambda\xi$、$|\lambda E-A|=0$、$(\lambda E-A)\xi=0$等公式

例：A的各行元素之和均为2，求A的一个特征值和特征向量.

(提示: $\xi=(1,\ldots,1)^T$，则$A\xi$为各行求和)

解：取 $\xi=(1,1,\cdots,1)^T$，则 $A\xi=(2,2,\cdots,2)^T=2\xi$，$\lambda=2$，特征向量 $(1,1,\cdots,1)^T$

(5) 对角化问题

例：$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 有3个无关特征向量, 2为二重特征值，求a、b的值.

(提示: A可对角化，则$r(2E-A)=1$)

解：A可对角化，$(2E-A)x=0$基础解系有2个向量，$r(N(2E-A))=2$，$r(2E-A)=1$

$2E-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-a&-2&-b\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&2&b\\1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=2, b=-2$

例：A满足$A^3=A$，则A可对角化.

(提示: $A^3=A$即 $(-E-A)(-A+A^2)=O$, $(E-A)(A+A^2)=O$, $(0E-A)(E-A^2)=O$,
-1几何重数$\geq r(-A+A^2)$, 1几何重数$\geq r(A+A^2)$, 0几何重数$\geq r(E-A^2)$,
$r(-A+A^2)+r(A+A^2)+r(E-A^2)\geq n$)

证明：$r(-A+A^2)+r(A+A^2)+r(E-A^2)\geq r(-A+A^2+A+A^2+E-A^2)=r(E)=n$ $\therefore$ 几何重数之和 $\geq n=$ 代数重数之和

又$\because$ 几何重数之和 $\leq$ 代数重数之和 $\therefore$ 几何重数和 $=n$，即可对角化。

(6) 实对称问题

例：设3阶实对称矩阵A满足 $r(A)=2$，$A^3+2A^2=O$，求A的特征值.

(提示: $\lambda^3+2\lambda^2=0$, $\lambda=0,-2$，$r(A)=2$，$A\sim diag(-2,-2,0)$)

解：注意，由 $A^3+2A^2=0$ 得 $\lambda^2(\lambda+2)=0$ 不能下意识认为0是二重根，而是由 $r(A)=2$ 知 -2 为二重根。

不同于 $|\lambda E-A|=0$ 得到的式子，无法用来判断代数重数

例：设A为n阶实对称矩阵，证明对任意正整数k，必有实对称矩阵B使得 $B^{2k+1}=A$，若实矩阵C满足$A=C^2$，且A对称，问A是否半正定.

(提示: 正交$Q^TAQ=D^{2k+1}$, $B=QDQ^T$，$\lambda(A)=\lambda(C)^2$，取$\lambda(C)=i$ 有$\lambda(A)=-1$)

证明：$A=P\Lambda P^T$，其中 $P^T=P^{-1}$，对 Λ 的每一项对角元开 $(2k+1)$ 次根号得 Λ'，令 $B=P\Lambda' P^T$ 即可

$\lambda(A)=\lambda^2(C)$，故 $\lambda(A)\geq 0$ 恒成立，故为半正定

例：若 $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\2&-2&9\end{pmatrix}$, 求 $\max\limits_{x^Tx=1} x^TAx, \min\limits_{x^Tx=1} x^TAx$.

(提示: $x^TAx=(Q^Tx)^T\mathrm{diag}(1,4,10)(Q^Tx)=y^T\mathrm{diag}(1,4,10)y$, $y^Ty=1$)

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-2\\-1&\lambda-3&2\\-2&2&\lambda-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&-2\\\lambda-4&\lambda-3&2\\0&2&\lambda-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&-2\\0&\lambda-2&4\\0&2&\lambda-9\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda^2-11\lambda+18-8)\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=10$

$\therefore A=Q^T\mathrm{diag}(1,4,10)Q$，$x^TAx=(Qx)^TD(Qx)=y^TDy$，由于Q为正交矩阵，$y^Ty=x^Tx=1$

$\max=\max(y_1^2+4y_2^2+10y_3^2)=10$，$\min=\min(y_1^2+4y_2^2+10y_3^2)=1$

(7) 利用消去作用

例：设A为n阶正交矩阵，$|A|=-1$，证明A有特征值-1.

(提示: 考虑 $|E+A|=0$，取$A^T(E+A)=(E+A)^T$行列式可得)

证明：$A^T(E+A)=A^T+E=(E+A)^T$，$|A|\cdot|E+A|=|E+A|$，故 $-|E+A|=|E+A|$，$|E+A|=0$，故有特征值 -1

五、二次型问题

(1) 利用对角化

例：$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$,正交变换$x=Py$化标准形为$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$, 求 $|3A^*-2A^{-1}|$.

(提示: $A\sim D=\mathrm{diag}(2,-1,-1)$, $3A^*-2A^{-1}=(3|A|-2)A^{-1}\sim(3|D|-2)D^{-1}$
$|3A^*-2A^{-1}|=|(3|D|-2)D^{-1}|=(3|D|-2)^3|D|^{-1}$)

解：$3A^*-2A^{-1}=(3|A|-2)A^{-1}$，$|3A^*-2A^{-1}|=(3|A|-2)^3\frac{1}{|A|}$ (*)

$|A|=|\mathrm{diag}(2,-1,-1)|=2$，故 (*) $=(3\times2-2)^3\times\frac{1}{2}=4\times4\times2=32$

(2) 利用特征向量消矩阵

例：设A , C为正定矩阵，且$AX+XA=C$有唯一解B，证明B对称正定.

(提示: B, B^T满足方程，B特征值λ满足$\xi^TC\xi=\xi^TAB\xi+\xi^TBA\xi=2\lambda\xi^TA\xi$)

证明：A、C都实对称，且特征值均为正，$A=A^T$，$C=C^T$，$AB+BA=C$，$(AB+BA)^T=C^T\Rightarrow B^T$也符合方程

由 $AX+XA=C$ 解的唯一性，$B=B^T$，故B也对称

A、C正定 $\Rightarrow x^TAx, x^TCx>0\ (x\neq 0)$，取B的特征值 λ 对应的特征向量 ξ，有：

$\xi^TC\xi=\xi^TAB\xi+\xi^TB^TA\xi=2\lambda\xi^TA\xi$，而 $\xi^TC\xi$，$\xi^TA\xi>0$ $\therefore\lambda>0$ $\therefore$ B正定

(3) 利用相似特征值不变合同正定性不变

例：设A,B对称正定，且$AB=BA$，证明AB对称正定.

(提示: $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$，$B=D^TED=D^TD$，
$AB\sim DABD^{-1}=DAD^T$正定, $\lambda(AB)=\lambda(DAD^T)>0$)

证明: $AB=BA$, $A^T=A$, $B^T=B$, $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$, 故对称

由正定性，存在可逆矩阵P，$B=P^TEP=P^TP$，$BP^{-1}=P^T$，$AB\sim PABP^{-1}=PAP^T$

下面看PAP^T是否正定，$x^T(PAP^T)x=(P^Tx)^TA(P^Tx)>0$，故$PAP^T$正定，故$\lambda(AB)=\lambda(PAP^T)>0$，正定

例. 矩阵$A, B\in\mathbf{R}^{n\times n}$对称正定. 证明$(A+B)(A^{-1}+B^{-1})$的所有特征值为不小于4的实数.

(提示: $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=2E+AB^{-1}+BA^{-1}=2E+C+C^{-1}$, $C=AB^{-1}$,
$P^TBP=E$, $B^{-1}=PP^T$, $C=AB^{-1}\sim P^TAP$，$\lambda(C)=\lambda(P^TAP)>0$)

证明：按提示证明C的$\lambda>0$后，知$\lambda[(A+B)(A^{-1}+B^{-1})]=2+\lambda+\frac{1}{\lambda}\geq 4$

(4) 利用顺序主子式

例：设 $A=\begin{pmatrix} a+3 & 1 & 2 \\ 2a & a-1 & 1 \\ a-3 & -3 & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$, $Ax=\theta$有非零解, B正定, 求a.

(提示: $|A|=a(a+1)(a-3)=0$, $a=0$或-1或3，
B的顺序主子式>0，即$3a-1>0,23a-29>0$)

解: $Ax=0$有非零解 $\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow a(a+1)(a-3)=0 \Rightarrow a_1=0,\ a_2=-1,\ a_3=3$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=3a-1>0$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix}=3(9a-4)-(9+4)+2\times(-2-2a)=23a-29>0 \Rightarrow a=3$

(5) 利用块合同变换

例：设$B\in\mathbf{R}^{n\times n}$对称, 证明$A=\begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix}$正定的充要条件是$|\lambda_i(B)|<1, i=1,\dots,n$.

(提示: 取$P=E(1,2(-B))$, $P^TAP=\mathrm{diag}(E,E-B^2)$正定即$E-B^2$正定，
即$\lambda(E-B^2)=1-\lambda(B)^2>0$)

证明: $P=\begin{pmatrix} E & -B \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $P^TAP=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -B & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E-B^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ 0 & E \end{pmatrix}=\mathrm{diag}(E, E-B^2)$

(可通过把$\begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix}$视$\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$来构造出$P$)，$\lambda(E-B)^2>0 \Leftrightarrow |\lambda_i(B)|<1$

(6) 利用特征值与正定性关系

例：设A, B是对称正定矩阵，A的特征值的最小值大于B的特征值的最大值，证明$A-B$正定.

(提示: 取A最小特征值和B最大特征值的平均值为k，则$A-kE$, $kE-B$正定，
于是 $A-B=(A-kE)+(kE-B)$正定)

六、线性空间问题

(1) 过渡矩阵

例. 线性空间$\mathbf{R}^3$中有一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$. 已知$\alpha_1=\varepsilon_1$, $\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\alpha_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$， 以及 $\beta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\beta_2=2\varepsilon_2+\varepsilon_3$, $\beta_3=\varepsilon_1+3\varepsilon_3$. 求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵.

(提示: $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P_1$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P_2$,
$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P_1^{-1}P_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$)

解: $\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{A}=\underbrace{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}_{C}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{P_1}$, $\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}_{B}=\underbrace{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}_{C}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}}_{P_2}$

$C=AP_1^{-1}$ $\therefore B=AP_1^{-1}P_2 \Rightarrow P=P_1^{-1}P_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&3\\0&1&3\end{pmatrix}$

(2) 不同基下的坐标

例. 已知$\mathbf{R}^3$的两组基为$\varepsilon_1=(1,0,0)^T$,$\varepsilon_2=(0,1,0)^T$,$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$和$\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(1,1,0)^T$, $\alpha_3=(1,1,1)^T$，求在两组基下坐标相同的向量.

(提示: 两组基的表示式构成方程组求解)

解: 设 $x=t_1\varepsilon_1+t_2\varepsilon_2+t_3\varepsilon_3=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+t_3\alpha_3 \Rightarrow t_1(\varepsilon_1-\alpha_1)+t_2(\varepsilon_2-\alpha_2)+t_3(\varepsilon_3-\alpha_3)=0$

$\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}=\theta$, $\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\0\\0\end{pmatrix}$, $k\in R$