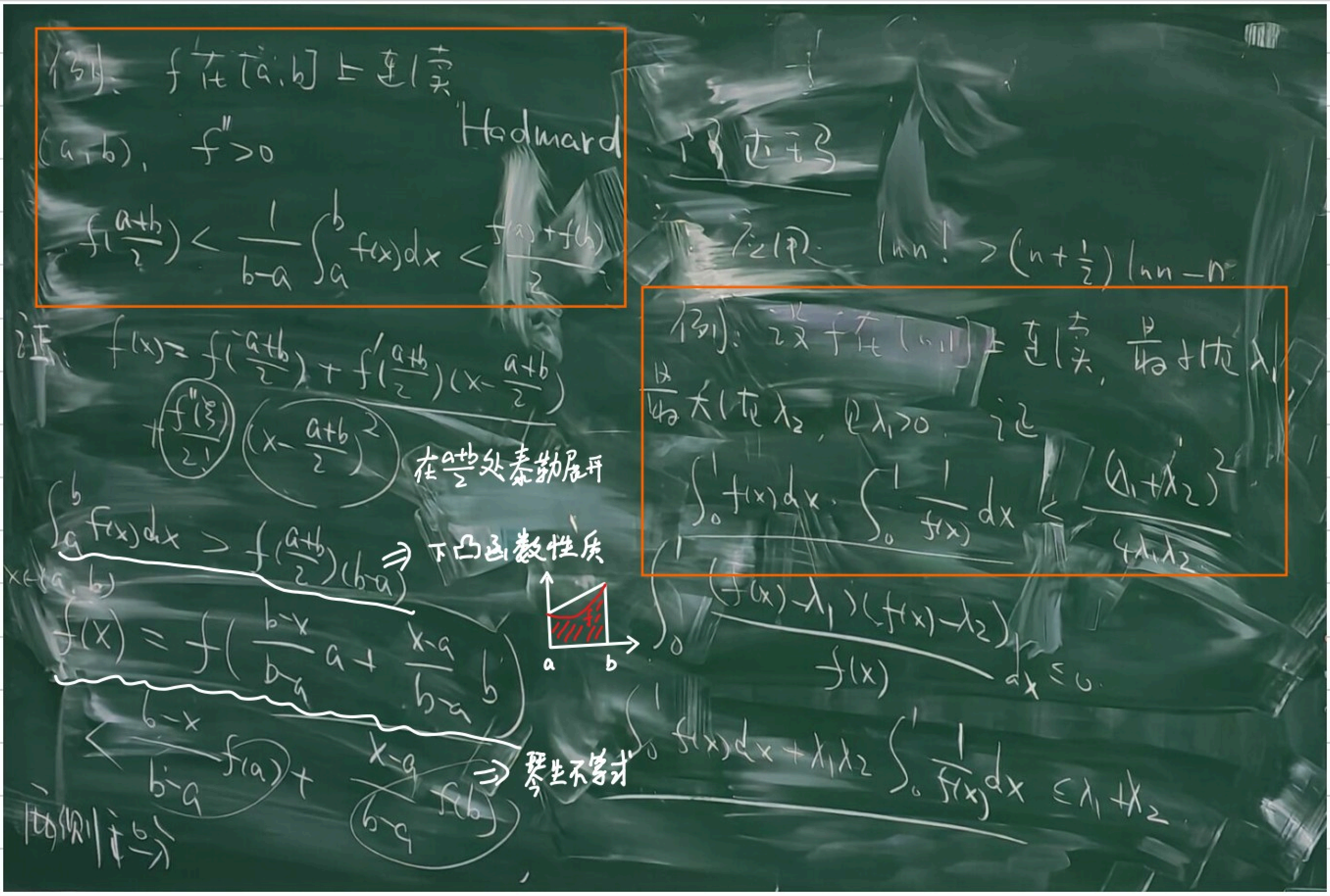
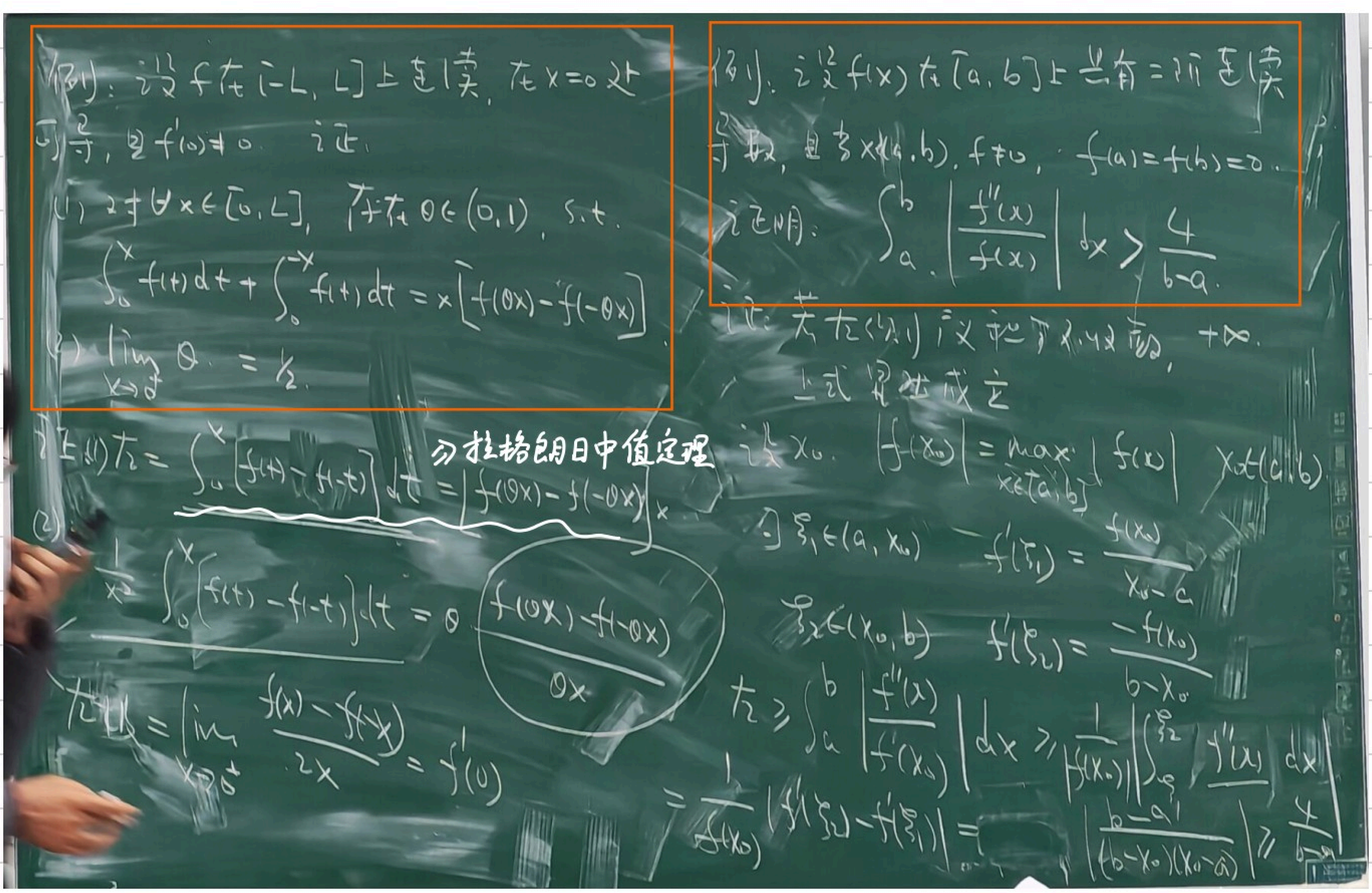
微积分第三次自救


例. f在[a,b]上连续, (a,b), $f''>0$
Hadmard
$f(\frac{a+b}{2}) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}$
证: $f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2$
在$\frac{a+b}{2}$处泰勒展开
$\int_a^b f(x)dx > f(\frac{a+b}{2})(b-a)$
⇒ 下凸函数性质
a
b
$x\in(a,b)$
$f(x) = f(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$
⇒ 琴生不等式
例. $\ln n! > (n+\frac{1}{2})\ln n - n$
例: 设f在[0,1]上连续, 最小值λ_1, 最大值λ_2, 且$\lambda_1>0$. 证
$\int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \le \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{4\lambda_1\lambda_2}$
$\int_0^1 \frac{(f(x)-\lambda_1)(f(x)-\lambda_2)}{f(x)}dx \le 0$
$\int_0^1 f(x)dx + \lambda_1\lambda_2\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \le \lambda_1+\lambda_2$


例: 设f在[-L,L]上连续, 在x=0处可导, 且$f'(0)\ne 0$. 证:
(1) 对$\forall x\in[0,L]$, 存在$\theta\in(0,1)$, s.t. $\int_0^x f(t)dt + \int_0^{-x} f(t)dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$
(2) $\lim_{x\to 0^+} \theta = \frac{1}{2}$
证(1) 左 $= \int_0^x [f(t)-f(-t)]dt = [f(\theta x)-f(-\theta x)]x$
⇒ 拉格朗日中值定理
(2) $\frac{1}{x^2}\int_0^x [f(t)-f(-t)]dt = \theta\,\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{\theta x}$
左(1) $= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(-x)}{2x} = f'(0)$
例. 设f(x)在[a,b]上具有二阶连续导数, 且当$x\in(a,b)$, $f\ne 0$, $f(a)=f(b)=0$.
证明: $\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > \frac{4}{b-a}$
证: 若在(a,b)内有..., $+\infty$, 上式显然成立
设x_0: $|f(x_0)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $x_0\in(a,b)$
$\exists \xi_1\in(a,x_0)$, $f'(\xi_1) = \frac{f(x_0)}{x_0-a}$
$\xi_2\in(x_0,b)$, $f'(\xi_2) = \frac{-f(x_0)}{b-x_0}$
左 $\ge \int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x_0)}\right| dx \ge \frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x)dx\right|$
$= \frac{1}{|f(x_0)|}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)| = \left|\frac{b-a}{(b-x_0)(x_0-a)}\right| \ge \frac{4}{b-a}$

例：设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称，证：

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx$$

$f(x)=f(a+b-x)$.

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x)\,dx \overset{\text{令}\,u=a+b-x}{=} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx.$$

例：设 f 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，证存在 $\xi\in(a,b)$, s.t. 中矩形公式的误差项

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)(b-a)} + \frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$$

证明：

$$f(x) = f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \underbrace{f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)} + \frac{1}{2!}f''(\eta)\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^2$$

对称区间积分时，奇数次项消失

η 在 x, $\frac{a+b}{2}$ 之间

$$\int_a^b f(x)\,dx = f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{f''(\eta)}_{g(x)}\underbrace{\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^2}_{w(x)}dx$$

$$= \frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b \left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

积分中值定理

$g(x)=f''(\eta(x))$

用中值提出来即 $g(x_0)=f''(\eta(x_0)) = f''(\xi)$

$$= f''(\xi)\,\frac{1}{24}(b-a)^3$$

对于连续函数 g 和非负可积函数 w，有： （第一积分中值定理）

$$\int_a^b g(x)w(x)\,dx = g(\xi)\int_a^b w(x)\,dx$$

其中 $\xi\in[a,b]$（若 w 为正则可取开区间 (a,b)）。

例：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$.

证明：存在 $\xi\in(a,b)$, s.t.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi)$$

证：$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

$$F(a)=F(b)+F'(b)(a-b)+\cancel{\frac{F''(b)}{2}}(a-b)^2 + \frac{F'''(\xi_1)}{3!}(a-b)^3$$

$$F(b)=F(a)+F'(a)(b-a)+\cancel{\frac{F''(a)}{2}}(b-a)^2 + \frac{F'''(\xi_2)}{3!}(b-a)^3$$

$$F(b) = \cdots \left\{ \frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right](b-a) + \frac{f''(\xi_2)+f''(\xi_1)}{3!}(b-a)^3 \right\}$$

利用介值定理，存在 ξ, s.t.

$$f''(\xi) = \frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]$$

$$F\left(\tfrac{a+b}{2}\right) = F(a) + \cdots$$

$$F\left(\tfrac{a+b}{2}\right) = F(b) + \cdots$$

例: $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

解. 令 $x=\tan t$ $\quad dx=\sec^2 t\,dt$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt$$

$$\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]$$

$$=\ln\frac{2}{1+\tan t}$$

$$=\ln 2-\ln(1+\tan t)$$

$$\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$=-\left[\ln(1+\tan t)-\frac{1}{2}\ln 2\right]$$

例: $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\,dx>0$.

$$\xrightarrow[x=\sqrt{t}]{x^2=t}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

$dx=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$. $\quad u=t-\pi$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin t\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}}\right)dt>0$$

$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

$$I=2\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}\;d\arcsin\sqrt{x}$$

凑微分

$$\int_0^a f(x)dx \xrightarrow{x=a-t} \int_0^a f(a-t)dt$$

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^a[f(x)+f(a-x)]dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

例: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln(\sin x)dx$.

不是广义积分.

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,d(1-\cos x)$$

$$=\ln(\sin x)\cdot(1-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\,d(\ln\sin x)$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin x+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx$$

$$=\ln 2-$$

结论 1：积分区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{a+b\cos x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\left(\frac{b}{a}\right),$$

其中 $a>0, |b|<a$。

这个结果也可以写成半角形式：令 $\theta = \arccos\frac{b}{a}$，则

$$\arccos\frac{b}{a} = 2\arctan\sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

所以等价于

$$\frac{4}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right).$$

结论 2：积分区间 $[0, \pi]$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a+b\cos x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

其中 $a>0, |b|<a$。

这是更常见的一个标准结果，用万能代换直接得到，上下限对称到整个半周期，积分更简单。

Wallis 公式通常从 **Wallis 积分** 推导：

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

得到递推关系：

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

并比较偶次项 I_{2n} 与奇次项 I_{2n+1} 的比值，令 $n\to\infty$ 可得 Wallis 乘积公式。